

# IMPULS- UND WÄRMEÜBERTRAGUNG IN TURBULENTEN WINDSCHATTEN HINTER ROTATIONSKÖRPERN

H. REICHARDT und R. ERMSHAUS

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen

(Received 6 October 1961)

**Zusammenfassung**—Die Breitenentwicklung eines turbulenten rotationssymmetrischen Windschattens hängt von der Form des Rotationskörpers ab, der den Windschatten erzeugt. Auch der Funktionsverlauf des Impulsverlustes wird in gewissen Grenzen von der Körperform beeinflusst. Hinter schlanken Rotationskörpern ergeben sich glockenförmige Verteilungen der Geschwindigkeit und der Temperatur. Der Koeffizient für die Wärmeübertragung ist etwas grösser als der Koeffizient für die Impulsübertragung. Die äussere Potentialströmung behindert den turbulenten Austausch in axialen Windschatten stärker als in ebenen Windschatten und in Freistrahlen.

## FORMELZEICHEN

$x$ ,	Längskordinate (in der Hauptströmungsrichtung) bzw. Abstand vom Störungsursprung;	$q$ ,	turbulenter Wärmestrom in der $y$ -Richtung;
$y$ ,	Querkoordinate senkrecht zu $x$ ;	$\beta$ ,	dimensionsloses Mass für die relative Stärke der korrelierten Geschwindigkeitsschwankungen;
$b$ ,	als Breitenmass definierter $y$ -Abstand;	$\gamma$ ,	Formfaktor des Windschattenprofils;
$\zeta$ ,	= $y/b$ , dimensionsloser Querabstand;	$c_w$ ,	Widerstandsbeiwert.
$u$ ,	Strömungsgeschwindigkeit in der $x$ -Richtung;		
$U$ ,	$u = U$ , Strömungsgeschwindigkeit der äusseren Potentialbewegung;		
$u_1$ ,	Geschwindigkeitsverlust im Windschatten;		
$u_{1m}$ ,	maximaler Geschwindigkeitsverlust bei $y = 0$ ;		
$v$ ,	Strömungsgeschwindigkeit in der Querichtung $y$ ;		
$u', v'$ ,	Geschwindigkeitsschwankungen in der $x$ - bzw. $y$ -Richtung;		
$\bar{u}, \bar{v}$ ,	zeitliche Mittelwerte von $u$ und $v$ ;		
$T, T_m$ ,	Übertemperatur bzw. maximale Übertemperatur im Windschatten;		
$\varphi$	= $u_1/u_{1m}$ , dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil;		
$\theta$	= $T/T_m$ dimensionsloses Temperaturprofil;		
$\rho, c_p$ ,	Dichte bzw. spezifische Wärme des strömenden Mediums;		
$\tau$ ,	turbulente Scheinreibung (Schubspannung);		
$A, A_q$ ,	Austauschgrössen für den Impuls bzw. für die Wärme;		

## 1. EINLEITUNG

DAS PROBLEM der turbulenten Impulsübertragung im Windschatten hinter einem Rotationskörper ist erstmalig von Swain [1] theoretisch behandelt worden und zwar auf der Grundlage der Prandtl'schen Mischungswegtheorie [2]. Zu dem Thema der Impuls- und Wärmeübertragung im achsensymmetrischen Nachlauf haben Hall und Hislop [3] einen experimentellen Beitrag geliefert. Diese Autoren ermittelten die Verteilungen der Geschwindigkeit und der Temperatur hinter einem an Streben gehaltenen geheizten Kreiszyylinder. Weitere Experimentaluntersuchungen scheinen nicht veröffentlicht zu sein. Der Mangel an Berichten über die Strömungsverhältnisse im rotationssymmetrischen Windschatten dürfte auf die Schwierigkeiten zurückzuführen sein, einen Rotationskörper hinreichend störungsfrei in einem Luftstrom zu befestigen. Dies war jedenfalls der Grund dafür, dass in der im hiesigen Institut durchgeführten Arbeit über die Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz [4] keine experimentellen Daten über den achsensymmetrischen Windschatten mitgeteilt worden sind.

In letzter Zeit haben wir nun eine Halterung

erprobt, bei der nichtaxiale Störungen vermieden werden. Wir waren daher in der Lage, hinter einem geheizten Rotationskörper einen praktisch rotationssymmetrischen Nachlauf zu erzeugen und darin die Profile der Geschwindigkeit und der Temperatur in einem grösseren Abstandsbereich zu ermitteln. Darüber wird im folgenden berichtet. Die Darstellung des rotationssymmetrischen Falles erfolgt im Sinne der vorhergehenden Untersuchungen, bei denen unter Vermeidung spezieller Turbulenzhypothesen die formelmässige Beschreibung der Vorgänge aus den experimentellen Tatbeständen heraus entwickelt worden ist.

Verschiedene allgemeine Formeln, die im folgenden benötigt werden, sind bereits in der früheren Abhandlung abgeleitet worden. Um eine in sich geschlossene und verständliche Darstellung der achsensymmetrischen Windschattenströmungen zu erhalten, haben wir die Ableitung der allgemeinen Beziehungen hier zum Teil wiederholt.

## 2. VERSUCHSANORDNUNG

Der Rotationskörper befand sich in der Austrittsöffnung der Düse eines Windkanals (siehe Abb. 1). Er sass am Ende eines längeren Rundstabes, der bis in die Düsenvorkammer hinein-

reichte und dort an dünnen Stahldrähten in der Hauptströmungsrichtung befestigt war. Die Störungen hinter den Stahldrähten und den elektrischen Leitungen in der Düsenvorkammer waren in dem aus der Düse tretenden Luftstrahl nicht mehr nachweisbar. Wir erhielten also einen praktisch rotationssymmetrischen Windschatten in der Messstrecke. Der Impulsverlust war zwar nicht allein durch den Strömungswiderstand des Rotationskörpers bedingt, auch die Grenzschicht an dem Stab, der den Körper hielt, hatte einen gewissen Einfluss. Doch da die Wahl der Grösse des gesamten Impulsverlustes in unserem Belieben stand, spielte die Grösse des Impulsverlustes des Stabes keine Rolle, sofern nur die axiale Symmetrie gewährleistet war.

Unser hauptsächlichster Rotationskörper bestand aus einer scharfkantigen Kreisscheibe von 20 mm Durchmesser, die mit einem Kreiszylinder von 15 mm Durchmesser und 44 mm Länge verbunden war (Abb. 2a). Auf der Oberfläche des Zylinders lag eine Heizwicklung. Der Körper war so befestigt, dass sich der Zylinder mit der Heizwicklung im Abstrom befand. Die Strömung passierte also zunächst die scharfe Kante der Kreisscheibe, wo eine Ablösung erfolgte. Die über die Heizwicklung strömende Luft war daher verwirbelt.

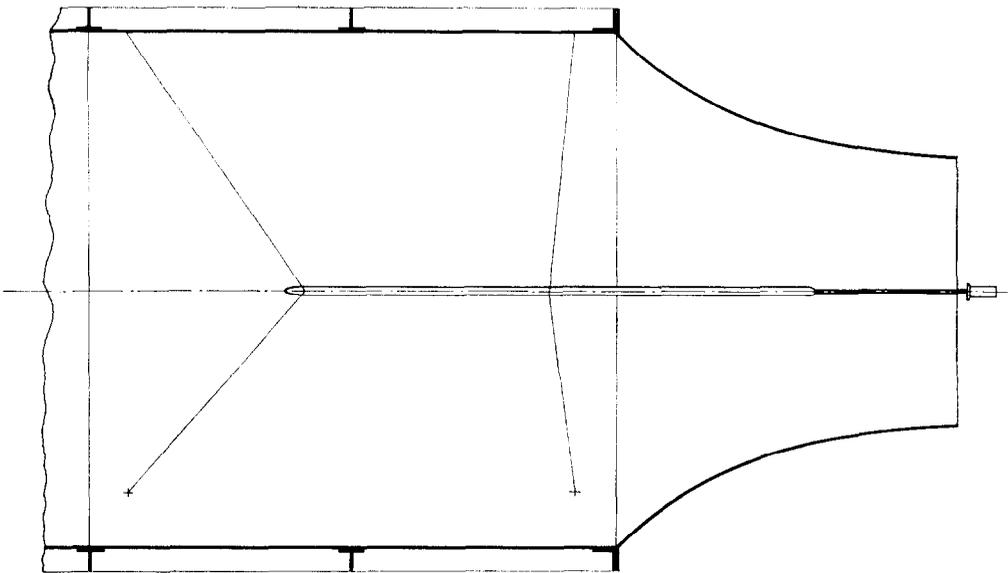
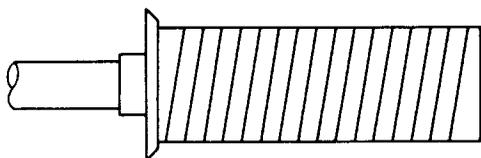
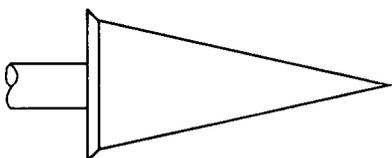


ABB. 1. Modellhalterung in der Düsenvorkammer.

Weiterhin haben wir Strömungsmessungen hinter der einfachen Kreisscheibe und hinter verschieden schlanken Kegeln (Abb. 2b) durchgeführt. Diese Körper waren leider nicht heizbar, so dass wir hier auf die Ermittlung der turbulenten Wärmeausbreitung verzichten mussten.



(a)



(b)

ABB. 2. Rotationskörper.

Die Entfernung von der Düsenöffnung bzw. vom Rotationskörper bis zum Auffangtrichter betrug 1,70 m. Es war aber nur eine Strecke von etwa 1,20 m (das sind im Durchschnitt etwa 60 Körperdurchmesser) für die Messungen nutzbar, da die Störungen im Freistrah in der Nähe des Auffangtrichters zu gross wurden im Vergleich zu den schwachen Nachlaufgeschwindigkeiten.

### 3. VORAUSSETZUNGEN FÜR EINE THEORETISCHE BEHANDLUNG

Um die Bewegungsgleichungen behandeln zu können, braucht man eine mathematisch formulierbare Vorstellung über den Turbulenzmechanismus (z.B. über den Mechanismus der turbulenten Scheinreibung, die Ausbreitung des Gesamtimpulses oder dgl.). Soll die Geschwindigkeitsverteilung oder das Impulsprofil auf der Grundlage einer solchen Vorstellung hergeleitet werden, so ist ausserdem noch die Voraussetzung erforderlich, dass die turbulenten Vermischungs- und Ausbreitungsvorgänge ähnlich verlaufen, wenn eine bestimmte Profilform erwartet wird,

bzw. wenn experimentell festgestellt worden ist, dass die Profile in verschiedenen Abständen vom Vermischungsurprung ihre Form beibehalten.

Die ersten Berechnungen turbulenter Geschwindigkeitsverteilungen erfolgten auf der Grundlage der von Prandtl konzipierten Hypothese des Mischungsweges [2] (von Tollmien, Schlichting, Swain u.a.). Wesentliche Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz sind unter Anwendung der Mischungswegtheorie erstmalig dargestellt worden.

Da bei allen diesen Untersuchungen die Ähnlichkeitsannahmen mit dem Ansatz über die Scheinreibung verknüpft waren, liess sich nicht unmittelbar erkennen, ob bzw. in welchem Masse der Mischungswegansatz oder die Ähnlichkeitsvoraussetzungen für die festgestellten Gesetzmässigkeiten verantwortlich waren. Zur Klärung dieser und anderer Fragen hat Reichardt [5] eine theoretische Darstellung freiturbulenter Vorgänge gegeben, bei der unter Vermeidung irgendwelcher Turbulenzhypothesen nur Ähnlichkeitsannahmen verwandt worden sind. Dabei zeigte es sich, dass die bekannten Gesetzmässigkeiten der Ausbreitung von Strahlen und Nachlaufströmungen allein aus der vorausgesetzten Ähnlichkeit der Strömungsvorgänge folgen und dass die Art des Ansatzes der Schubspannung als bestimmte Funktion des Geschwindigkeitsgradienten hier keine Rolle spielt. Eine ähnliche Darstellung der freien Turbulenz ist auch von Squire [6] publiziert worden.

Auch bei der folgenden Behandlung des rotationssymmetrischen Windschattens wollen wir uns auf Ähnlichkeitsvoraussetzungen beschränken und die Frage des Turbulenzmechanismus von vornherein offen lassen. Denn da es keine verbindliche Turbulenztheorie gibt, können Erkenntnisse über den Turbulenzmechanismus nur aus Experimenten gefolgert werden.

Ein besonderes Kennzeichen der Nachlaufströmungen ist die Konstanz des Gesamtimpulsverlustes und des gesamten Wärmestromes. Wir beginnen daher mit der Aufstellung der Formeln für den Impuls und für den Wärmestrom. Dabei wird sich herausstellen, dass die Ähnlichkeit der Profile der Geschwindigkeit und der Temperatur nur in einem Bereich möglich

ist, der hinreichend weit vom Widerstandskörper entfernt ist. Die Strömung in diesem Bereich, wo sich die Formen der Verteilungen der Geschwindigkeit, der Temperatur usw. nicht mehr verändern, wollen wir als "ausgebildet" bezeichnen.

Die durch die Rotationsachse gehende Koordinate sei  $x$ , die Strömungsgeschwindigkeit in dieser Richtung sei  $u = \bar{u} + u'$ . In einem gewissen Bereich des Freistrahles kann mit einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit  $u = U$  gerechnet werden. Im Windschatten hinter dem Widerstandskörper ist die Strömungsgeschwindigkeit gegenüber der Geschwindigkeit  $U$  im äusseren Bereich herabgesetzt. Wir sprechen hier von einer "Geschwindigkeitsdelle". Der Geschwindigkeitsverlust (oder die "Dellengeschwindigkeit") sei  $u_1$ . Dann ist die Strömungsgeschwindigkeit im Windschatten ausgedrückt durch

$$u = U - u_1. \quad (1)$$

Daraus folgt für den zeitlichen Mittelwert der Impulsstromdichte, wenn  $\rho$  die Dichte des Mediums bedeutet:

$$\rho \bar{u}^2 = \rho U^2 - 2\rho U \bar{u}_1 + \rho \bar{u}_1^2 + \rho \overline{u'^2}. \quad (2)$$

Demnach beträgt der Impulsstromverlust im Windschatten:

$$i = 2\rho U \bar{u}_1 \left( 1 - \frac{\bar{u}_1}{2U} - \frac{\overline{u'^2}}{2U \bar{u}_1} \right). \quad (3)$$

Nach dem Impulssatz ist das Integral von  $i$  über dem Querschnitt des Windschattens konstant, wenn keine wesentlichen Unterschiede des Druckes auftreten.

Wegen der Konstanz des Gesamtimpulses vermindern sich die Geschwindigkeiten  $\bar{u}_1$  und  $u'$  mit wachsender Ausbreitung der turbulenten Vermischungsvorgänge in die Querrichtung  $y \perp x$ , die bei zunehmender Entfernung vom Widerstandskörper beobachtet wird. Daher können in Gl. (3) das zweite und dritte Glied gegenüber Eins vernachlässigt werden, wenn  $x$  hinreichend gross wird. Der Impulsverlust ist dann proportional dem Geschwindigkeitsverlust  $\bar{u}_1$ .

Enthält der Widerstandskörper eine Wärmequelle, so fliesst durch die Flächeneinheit des Windschattenquerschnittes der Wärmestrom

$$i_T = \rho c_p \bar{T} U = \rho c_p \bar{T} U \left( 1 + \frac{\bar{u}_1}{U} + \frac{\overline{T' u'}}{\bar{T} U} \right). \quad (4)$$

wenn  $T$  die Temperaturerhöhung und  $c_p$  die spezifische Wärme bedeutet. Auch in dieser Gleichung sind die in der Klammer stehenden, von  $x$  abhängenden Glieder gegenüber Eins zu vernachlässigen, wenn die Entfernung  $x$  vom Störungsursprung hinreichend gross wird. In diesem Falle ist dann der Wärmestrom proportional der Temperatur  $\bar{T}$ .

Wir wollen für die Geschwindigkeit, die Temperatur und den Querabstand dimensionslose Werte einführen und zwar durch folgende Definitionen:

$$q = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_{1m}}, \quad \vartheta = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_m}, \quad \zeta = \frac{y}{b}.$$

Hier sind  $\bar{u}_{1m}$  und  $\bar{T}_m$  die Maximalwerte für den Geschwindigkeitsverlust bzw. für die Temperatur, während  $y = b$  ein frei wählbares Mass für die Vermischungsbreite bedeutet. Dann lassen sich die Grössen  $q$  und  $\vartheta$  als Funktionen von  $\zeta$  und  $x$  darstellen. Bei hinreichend grosser Entfernung  $x$ , bei der in den Gleichungen (3) und (4) die von  $x$  abhängigen Glieder vernachlässigbar sind, ist aber die Annahme möglich, dass  $q$  und  $\vartheta$  nur von  $\zeta$  abhängen, dass also sowohl die Geschwindigkeitsprofile als auch die Temperaturprofile ähnlich sind.\*

Die von den Geschwindigkeitsunterschieden im Windschatten herrührenden turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten stehen in gewissen Verhältnissen zu diesen Geschwindigkeitsunterschieden. Wenn sich die Ähnlichkeit auch auf die Schwankungen beziehen soll, so ist anzunehmen, dass die auf die maximale Dellengeschwindigkeit  $\bar{u}_{1m}$  bezogenen Schwankungsgeschwindigkeiten nur von  $\zeta$  abhängen, bzw. dass das auf  $\bar{u}_{1m}^2$  bezogene Schwankungsprodukt  $u'v'$  eine Funktion von  $\zeta$  ist. Wir wollen diese Aussage folgendermassen formulieren:

$$\frac{\overline{u'v'}}{\bar{u}_{1m}^2} = \beta f(\zeta). \quad (5)$$

\* Da die Reynolds'sche Zahl des Windschattens  $Re = u_{1m} b / \nu$  mit  $x^{-1/3}$  abnimmt, findet der Bereich der ausgebildeten turbulenten Windschattenströmung bei grossen  $x$ -Abständen dort seine Grenze, wo die  $Re$ -Zahl ihren kritischen Wert unterschreitet und die Turbulenz erlischt.

Der vor der Funktion von  $\zeta$  stehende Proportionalitätsfaktor  $\beta$  gibt das durchschnittliche Verhältnis des Schwankungsproduktes zum Quadrat der maximalen Drellengeschwindigkeit wieder.  $\beta$  hat daher den Charakter eines Masses für die relative Stärke der Turbulenz im Windschatten. Wenn die Ähnlichkeitsannahme bezüglich der turbulenten Schwankungen zutrifft, ist  $\beta$  eine von  $x$  unabhängige Zahl.\*

#### 4. FORMELN FÜR DIE AUSGEBILDETE STRÖMUNG

##### (a) Die Quergeschwindigkeit

Zur Berechnung der Quergeschwindigkeit  $v$  empfiehlt es sich, die Kontinuitätsbedingung in Zylinderkoordinaten in folgender Form zu benutzen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial v y}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Im Windschatten ist  $u = U - u_1$ , also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\varphi u_{1m}).$$

Dafür lässt sich aber schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\varphi \frac{du_{1m}}{dx} + u_{1m} \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{\zeta}{b} \frac{db}{dx} \\ &= -\frac{u_1}{u_{1m}} \frac{du_{1m}}{dx} + \frac{du_1}{dy} \frac{y}{b} \frac{db}{dx}. \end{aligned} \quad (7)$$

Nach Einführung von (7) in Gl. (6) und der Integration dieser Gleichung über  $y$  folgt:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} y u_1 \\ &+ \frac{d \ln(u_{1m} b^2)}{dx} \frac{1}{y} \int u_1 y dy + C(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Wegen der Konstanz des Gesamtimpulsverlustes über dem Querschnitt des Windschattens ist  $u_{1m} b^2$  von  $x$  unabhängig [siehe Gl. (25)]. Daher fällt das zweite Glied in Gl. (8) fort und man erhält für die Quergeschwindigkeit die einfache Gleichung

\* Zur Vereinfachung der Schreibweise werden von hier ab die Querstriche für die zeitlichen Mittelwerte fortgelassen; nur dort, wo Missverständnisse möglich sind, werden die Querstriche beibehalten.

$$v = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} y u_1. \quad (9)$$

(Weil die Quergeschwindigkeit in der Achse aus Symmetriegründen verschwindet, ist  $C(x) = 0$ .)

Da der Geschwindigkeitsverlust  $u_1$  einen positiven Wert hat, bedeutet das negative Vorzeichen, dass die Quergeschwindigkeit in der negativen  $y$ -Richtung erfolgt, also von aussen nach innen gerichtet ist.

##### (b) Die Impulsübertragung $\overline{\rho u v}$

Unter der Annahme konstanter Dichte und konstanten Druckes erhält man durch Kombination der Bewegungsgleichungen mit der Kontinuitätsbedingung (6) folgende Beziehung für die Übertragung von  $u$ -Impuls in die Querrichtung  $y$ :

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y \overline{u v}}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Diese Gleichung hat ebenfalls die Form einer Kontinuitätsbedingung und zwar kommt durch (10) die Bewahrung des  $u$ -Impulses zum Ausdruck.

Im Falle des Windschattens ist näherungsweise

$$\overline{u^2} = U^2 - 2U u_{1m} \varphi,$$

also

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} = -2U \frac{\partial}{\partial x} (u_{1m} \varphi) = 2U \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wir können daher Gl. (10) in ähnlicher Weise behandeln wie Gl. (6) und erhalten

$$\overline{u v} = -\frac{2}{b} \frac{db}{dx} y U \overline{u_1}. \quad (11)$$

##### (c) Die Scheinreibung $\overline{\rho u' v'}$

Der in die  $y$ -Richtung übertragene  $u$ -Impuls besteht aus den beiden Anteilen:

$$\overline{\rho u v} = \rho \overline{u v} + \overline{\rho u' v'}. \quad (12)$$

Für den durch die mittlere Querbewegung  $\overline{v}$  veranlassten Impulstransport erhält man nach Gl. (9) näherungsweise

$$\rho \overline{u v} = -\frac{\rho}{b} \frac{db}{dx} y U \overline{u_1}, \quad (13)$$

da im ähnlichen Bereich  $\bar{u} \approx U$  ist. Wie ein Vergleich zwischen (11) und (13) zeigt, ist  $\rho\bar{u}\bar{v} = 0,5 \rho\bar{u}\bar{v}$ . Daraus folgt, dass auch die durch die Schwankungsbewegungen bedingte Impulsübertragung  $\rho\bar{u}'\bar{v}'$ , die mit der Scheinreibung  $\tau$  identisch ist, dem Anteil  $\rho\bar{u}\bar{v}$  gleicht:

$$\tau = \overline{\rho u'v'} = -\frac{\rho}{b} \frac{db}{dx} y U \bar{u}_1. \quad (14)$$

(d) Die Wärmeübertragung  $\rho c_p \overline{T'v'}$

Die Kontinuitätsbedingung für die Wärme lautet, wenn  $\rho$  und  $c_p$  als Konstante betrachtet werden:

$$\frac{\partial \overline{Tu}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y \overline{Tv}}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

In grosser Entfernung  $x$  ist  $\overline{Tu}$  ungefähr  $\overline{T}U = T_m \vartheta U$ . Für das erste Glied von (15) erhalten wir daher

$$\frac{\partial \overline{Tu}}{\partial x} = \frac{U}{T_m} \frac{dT_m}{dx} \overline{T} - \frac{U}{b} \frac{db}{dx} y \frac{d\overline{T}}{dy}. \quad (16)$$

Nach Einführung von (16) in Gl. (15) und Integration dieser Gleichung über  $y$  folgt:

$$\overline{Tv} = \frac{1}{b} \frac{db}{dx} y \overline{T}U - \frac{d \ln(T_m b^2)}{dx} \frac{U}{y} \int \overline{T}y dy + C(x). \quad (17)$$

Wegen der Konstanz des Wärmestromes über dem Querschnitt des Windschattens ist  $T_m b^2$  von  $x$  unabhängig. Daher fällt das zweite Glied von (17) fort und man erhält:

$$\overline{Tv} = \frac{1}{b} \frac{db}{dx} y \overline{T}U. \quad (18)$$

Da  $\overline{Tv} = \overline{T}\bar{v} + \overline{T'v'}$  ist, folgt für  $\overline{T'v'}$  unter Verwendung von (9):

$$q = \rho c_p \overline{T'v'} = \frac{\rho c_p}{b} \frac{db}{dx} y \overline{T}U. \quad (19)$$

Wegen der Kleinheit von  $\bar{u}_1$  gegenüber  $U$  ist die Wärmeübertragung  $\rho c_p \overline{T}\bar{v}$  klein gegenüber  $\rho c_p \overline{T'v'}$  bzw.  $\rho c_p \overline{T'v'}$ , d.h. die durch die turbulenten Schwankungen hervorgerufene Wärmeübertragung ist für den ähnlichen Bereich praktisch gleich dem gesamten Wärmestrom  $\rho c_p \overline{Tv}$ .

Für das Verhältnis von Wärmestrom  $q$  zu Impulsstrom  $\tau$  folgt aus (19) und (14)

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\rho c_p \overline{T}}{\rho \bar{u}_1} \quad (20)$$

(das Vorzeichen spielt in diesem Zusammenhang keine Rolle). Unter Einführung der Austauschgrössen  $A$  und  $A_q$

$$\tau = -A \frac{d\bar{u}}{dy} \quad q = -c_p A_q \frac{d\overline{T}}{dy}$$

folgt weiter

$$\frac{A}{A_q} = \frac{d(\ln \overline{T})}{d(\ln \bar{u}_1)} \quad (21)$$

oder für konstantes Verhältnis  $A/A_q$

$$\vartheta = q^A / A_q. \quad (22)$$

(e) Das Anwachsen der Vermischungsbreite

Aus (5) und (14) folgt

$$\frac{db}{dx} \frac{U q \zeta}{u_{1m}} = \beta f(\zeta) \quad (23)$$

Da in (23) bis auf  $(db/dx)(U/u_{1m})$  nur Funktionen von  $\zeta$  vorkommen, muss

$$\frac{db}{dx} \frac{U}{u_{1m}} = \beta \quad (24)$$

unabhängig von  $x$  sein, wenn die durch (5) eingeführte Ähnlichkeitsaussage zutrifft.

Andererseits folgt aus dem Impulssatz

$$U c_w d^2 = 16 \int u_{1y} dy = 16 u_{1m} b^2 \gamma. \quad (25)$$

wenn  $c_w$  der auf den Staudruck  $(\rho/2) U^2$  und den grössten Körperquerschnitt  $(\pi/4) d^2$  bezogene Widerstandsbeiwert bedeutet und der Formfaktor  $\int_0^\infty \varphi \zeta d\zeta =$  gesetzt wird.

Wir führen aus (25)  $u_{1m}$  in (24) ein und können dann diese Gleichung nach  $x$  integrieren:

$$\frac{b}{d} = \sqrt[3]{\left( \frac{3\beta c_w x - x_0}{16\gamma} \right)}. \quad (26)$$

Die Integrationskonstante  $x_0$  ist so zu bestimmen, dass der Gültigkeitsbereich der ähnlichen Lösungen richtig erfasst wird (Näheres im nächsten Kapitel).

Wir differenzieren (26) nach  $x$  und erhalten unter Verwendung von (25):

$$3 \frac{db}{dx} = \frac{b}{x}. \quad (27)$$

Diese Proportion ermöglicht in Gl. (24) das Ersetzen von  $db/dx$  durch das messtechnisch leichter bestimmbare Verhältnis  $b/x$ :

$$2b \frac{U}{u_{1m}} = 6\beta x. \quad (28)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich aus Messungen ermitteln, ob die oben eingeführte Voraussetzung der Ähnlichkeit der Schwankungsbewegungen den Tatsachen entspricht. Zugleich liefert Gl. (28) die Massstäbe für den Turbulenzfaktor  $\beta$ . Dieser Faktor ist proportional der "Dellenbreite"  $2b$  und umgekehrt proportional der "Dellentiefe"  $u_{1m}$ . Da die Turbulenz eine Verminderung von Geschwindigkeitsunterschieden bewirkt und zwar unter Verbreiterung des turbulenten Vermischungsgebietes, wird auch aus Gl. (28) deutlich, dass  $\beta$  ein Mass für die Stärke der Windschattenturbulenz darstellt.

Man kann natürlich auch die Gleichung (26) zur Kontrolle der Ähnlichkeitsbetrachtungen benutzen (für den ebenen Fall hat man ja bisher ausschliesslich die der Gl. (26) entsprechende Beziehung  $b^2 \sim c_w dx$  verwendet). Die Gleichungen (26) und (28) unterscheiden sich lediglich dadurch, dass in (26) noch der Impulssatz (25) steckt, mit dem  $u_{1m}$  aus (28) eliminiert werden kann.

Um einen Vergleich mit der ebenen Windschattenströmung durchführen zu können, geben wir hier noch die der Gl. (28) entsprechende Formel für den ebenen Windschatten an:

$$2b \frac{U}{u_{1m}} = 4\beta x. \quad (29)$$

## 5. MESSERGEBNISSE

Die in grösserer Entfernung von einem Rotationskörper gemessenen Verteilungen der Geschwindigkeit und der Temperatur waren erwartungsgemäss im Rahmen der Messgenauigkeit ähnlich. Überraschenderweise ergaben sich

aber hinter den verschiedenen Körpern verschiedene Formen der Verteilung. Hinter den schlanken Kegelkörpern (Länge zu Durchmesser grösser als 4) und auch hinter dem Zylinder mit der Stolperscheibe erhielten wir für die Geschwindigkeit und für die Temperatur glockenförmige Profile (siehe Abb. 3). Dagegen erzeugten die gedrunenen Körper, also die Kreisscheibe und die kurzen Kegel (Länge zu Durchmesser kleiner als 2) Störgeschwindigkeiten, die in Achsennähe praktisch konstant sind, um dann am Rande ziemlich schnell abzufallen (siehe Abb. 4). Die von den mittelschlanken Körpern ausgehenden Windschattenprofile haben Formen, die zwischen den in Abb. 3 und 4 dargestellten Ergebnissen liegen (wir wollen uns aber mit den Formen dieser "Zwischenprofile" nicht näher befassen).

Die Ursache für die Unterschiede in der Profilform liegt offenbar in der Verschiedenartigkeit der Störungen, die von den einzelnen Körpern ausgehen. Die grössten Störungen erzeugt die Kreisscheibe, während die schlanken Körper nur eine verhältnismässig schwache Verwirbelung hervorrufen. Wir kommen daher zu dem Resultat, dass Art und Grösse der Anfangsstörungen auch die Verhältnisse im ausgebildeten Bereich entscheidend beeinflussen. Die rotations-symmetrischen Nachlaufströmungen unterscheiden sich also wesentlich von den ebenen Nachlaufströmungen, bei denen unabhängig von Art und Grösse der Anfangsstörungen nur ein ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil festgestellt worden ist.

Die Nachlaufströmungen der verschiedenen Rotationskörper unterscheiden sich aber nicht nur hinsichtlich der Form der Geschwindigkeitsverteilung. Auch das Anwachsen der Vermischungsbreite ist hinter den einzelnen Körpern verschieden. Dies geht aus Abb. 5 hervor, in der die gemessenen Werte von  $(2b/d) (U/u_{1m})$  über  $x/d$  aufgetragen sind (als Breitenmass  $b$  wählten wir den Dellenradius in halber Dellentiefe, also bei  $\varphi = 0,5$ , während die Entfernung  $x$  von der Ablösungskante des betreffenden Körpers ab gerechnet ist). Gemäss Gl. (27) ist

$$\frac{2b}{d} \frac{U}{u_{1m}} = 6\beta \frac{x}{d}.$$

Demnach müssten, wenn die im 3. Kapitel

eingeführten Ähnlichkeitsannahmen zutreffen und wenn  $\beta$  ein universeller Faktor wäre, die Messwerte von  $(2b/d) (U/u_{1m})$  für alle Körper auf ein und dieselbe Gerade fallen. Dies trifft

als "Ursprung" der ausgebildeten Windschattenströmung aufgefasst werden, die natürlich erst in grösserer Entfernung  $x - x_0$  existiert. Die Lage  $x = 0$  der Stolperkante, die die groben

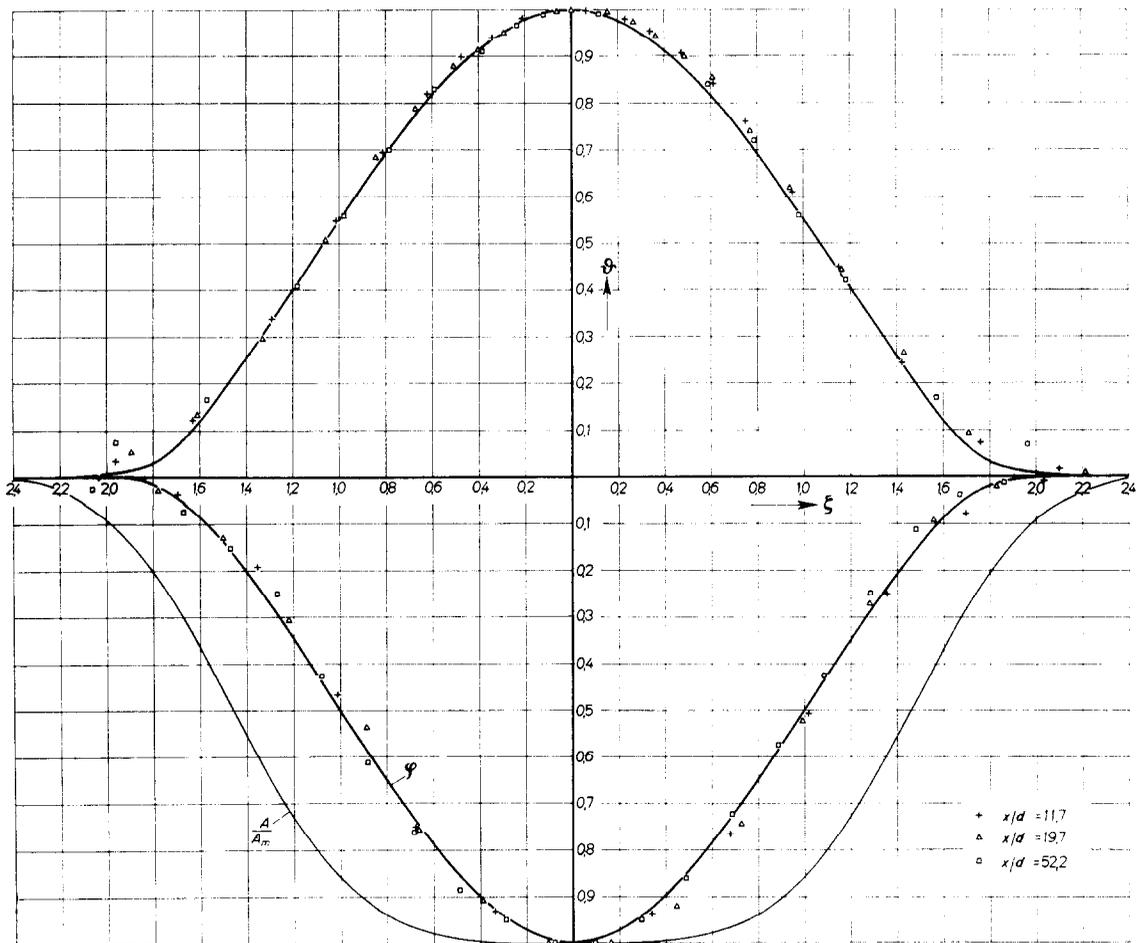


ABB. 3. Verteilungen der dimensionslosen Werte der Geschwindigkeit  $\varphi$ , der Temperatur  $\theta$  und der Austauschgrösse  $A/A_m$  über dem Querabstand  $\zeta = y/b$  in Windschatten hinter "schlanken" Rotationskörpern.

aber keineswegs zu. Zwar kann man die Messergebnisse näherungsweise durch gerade Linien darstellen. Aber diese Geraden haben bei den einzelnen Nachläufen ganz verschiedene Neigungen. Die einzelnen Geraden gehen nicht durch den Störungsursprung  $x = 0$ , sondern sie schneiden die  $x$ -Achse in verschiedenen Entfernungen  $x = x_0$ . Eine solche  $x_0$ -Stelle kann

Störungen hervorruft, ist also im allgemeinen nicht identisch mit den hypothetischen Entstehungsstellen der ausgebildeten Strömungen (daher durfte in Gl. (26) die Integrationskonstante  $x_0$  nicht Null gesetzt werden).

Die grössten Steigungen von  $(2b/d) (U/u_{1m})$  ergaben sich bei den Nachlaufströmungen hinter den gedrunenen Rotationskörpern, die schwa-

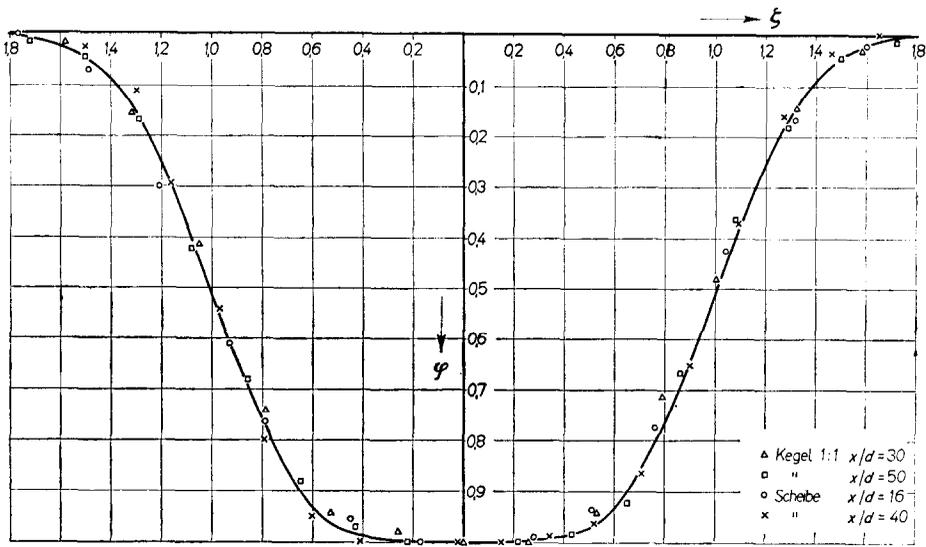


ABB. 4. Geschwindigkeitsverteilung  $\varphi$  in Windschatten hinter stumpfen Rotationskörpern.

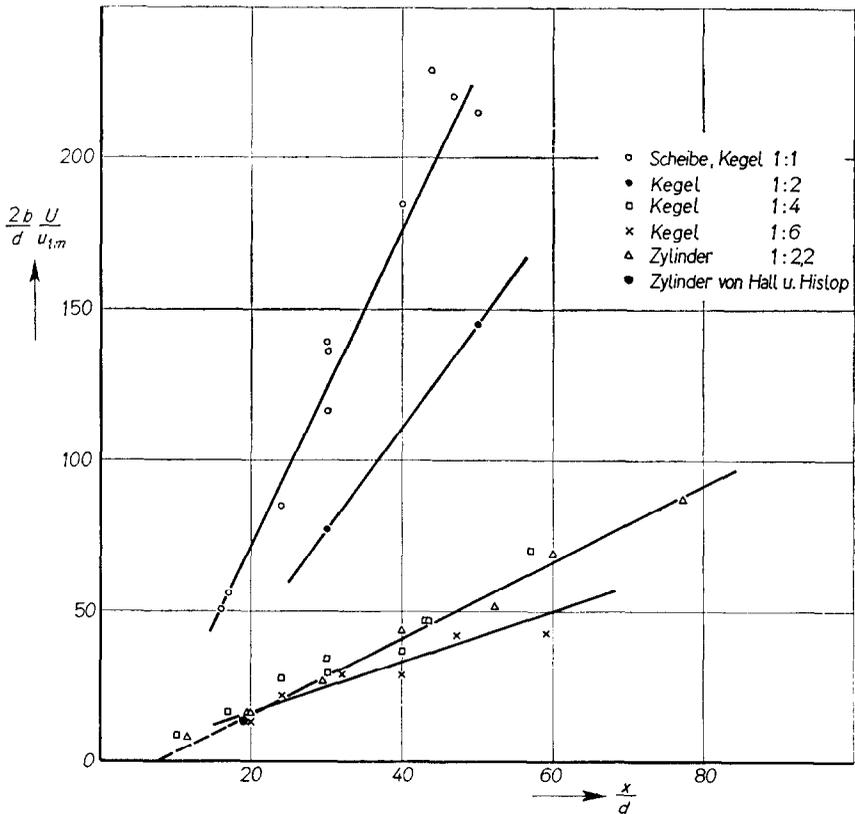


ABB. 5. Das Verhältnis der Breite  $2b$  der Geschwindigkeitsdelle zur Dellentiefe  $u_{1m}$  als Funktion des Abstandes  $x/d$  vom Störungsursprung in Windschatten hinter verschiedenen Rotationskörpern.

chen Neigungen bei den Strömungen hinter den schlanken Körpern. Da die Neigung proportional  $\beta$  ist und da  $\beta$  ein Mass für die Turbulenzstärke darstellt, so folgt aus den Messungen der Vermischungsbreite, dass die Turbulenzstärke hinter den stumpfen Körpern grösser ist als hinter den schlanken Modellen. Dieses Ergebnis würde als absolut plausibel erscheinen, wenn man sich nicht auf Grund früherer Untersuchungen des ebenen Falles an die Vorstellung gewöhnt hätte, dass in einer gewissen Entfernung vom Störkörper alle individuellen, von der speziellen Art ihrer Erzeugung herrührenden Störungen in einer allgemeinen ähnlichen turbulenten Nachlaufströmung untergehen. Demgegenüber werden nach den vorliegenden Messergebnissen die axialen Windschattenströmungen in ihrem gesamten Ausbreitungsbereich ganz wesentlich durch die individuellen Anfangsstörungen bestimmt.

Unter den Messwerten, die in Abb. 5 dargestellt sind, findet sich auch ein Messpunkt, den wir aus Versuchsergebnissen von Hall und Hislop [3] ermittelt haben. Diese Autoren hatten einen heizbaren kreiszylindrischen Körper von 4,45 cm Durchmesser und 8,9 cm Länge (also mit einem Seitenverhältnis 1:2) an Profilstreben in einem geschlossenen Windkanal aufgebaut. Die Messungen der Verteilungen der Geschwindigkeit und der Temperatur erfolgten in einer Entfernung von 76 cm hinter dem Körper. Aus den von Hall und Hislop angegebenen Messdaten erhielten wir  $(2b/d)(U/u_{1m}) = 13,4$ . Dieser Wert liegt im Bereich unserer Messwerte, die wir bei den Windschattenströmungen hinter den schlanken Körpern erhalten haben. Auch aus der Glockenform der Profile (siehe nächstes Kapitel) scheint hervorzugehen, dass der Zylinder von Hall und Hislop zu den "schlanken" Körpern zu zählen ist, von dem also nur mässige Störungen ausgingen. Eine sichere Bewertung dieser Ergebnisse ist allerdings schon wegen des nicht abschätzbaren Einflusses der Profilstreben kaum möglich.

Zur Verdeutlichung der Unterschiede zwischen den axialen und den ebenen Windschattenströmungen haben wir in Abb. 6 die aus früheren Messungen hinter Drähten und neuen Messungen hinter scharfkantigen Bändern ermittelten Werte von  $(2b/d)(U/u_{1m})$  in Abhängigkeit von  $x/d$

aufgetragen.\* Die Messpunkte der Strömungen hinter Drähten liegen näherungsweise auf einer Geraden mit der Neigung 0,38/1.† Die Messpunkte der Strömungen hinter den Bändern liegen etwas tiefer. Aber auch durch diese Punkte lässt sich eine Gerade mit der Neigung 0,38/1 ziehen (die Abweichungen von dieser Geraden liegen durchaus im Bereiche der Fehlermöglichkeiten). Aus der festgestellten Neigung folgt unter Beachtung von Gl. (29):

$$\beta = 0,095 \quad (\text{ebene Windschattenströmungen}).$$

Dieser Turbulenzfaktor gilt also sowohl für die Strömungen hinter den Drähten ( $c_w \approx 1,0$ ) als auch für die Strömungen hinter den scharfkantigen Bändern ( $c_w \approx 1,8$ ). Wenn man bedenkt, dass die von den Bändern ausgehenden Störungen wesentlich stärker sind als die Störungen hinter den Drähten, so bestätigen unsere Versuche die bisherige Auffassung, dass Art und Grösse der Anfangsstörungen keinen Einfluss auf die Entwicklung der Vermischungsbreite haben, wenn man von gewissen Variationen der Lage  $x_0$  des Ursprunges absieht. Wie wir weiterhin feststellten, ist auch die Form der Profile hinter den Bändern die gleiche wie hinter den Drähten. Im ebenen Falle gibt es daher einen allgemeinen Typ von ausgebildeten Nachlaufströmungen, der von der Art der Anfangsstörungen unabhängig ist.

Demgegenüber konnten wir unter den axialen Nachlaufströmungen keinen universellen Typ feststellen. Zwar zeigten alle Nachlaufströmungen, die von hinreichend schwachen Anfangsstörungen hervorgerufen waren (Zylinder und

\* In der früheren Arbeit [4] ist eine solche Auftragung der Versuchsergebnisse unterblieben. Da es seinerzeit als selbstverständlich galt, dass der ausgebildete Windschatten von der Art seiner Erzeugung unabhängig ist, war eine Variation der Körperform nicht für nötig gehalten worden. Nachdem aber die hier beschriebenen Versuche in axialen Windschatten die Abhängigkeit des Faktors  $\beta$  von der Körperform gezeigt hatten, musste mit der Möglichkeit gerechnet werden, dass dies auch in ebenen Windschatten der Fall ist. Wir haben daher zum Vergleich mit den früheren Versuchen hinter Drähten Windschattenströmungen hinter Bändern vermessen (die Bänder waren 3,3 und 3,7 mm breit).

† Diese Gerade schneidet die  $x$ -Achse in einem Punkte  $x_0 < 0$ . Der hypothetische Ursprung für die ausgebildeten Strömungen liegt also hier vor dem Störkörper, während er bei den axialen Nachläufen hinter dem Widerstandskörper anzunehmen ist.

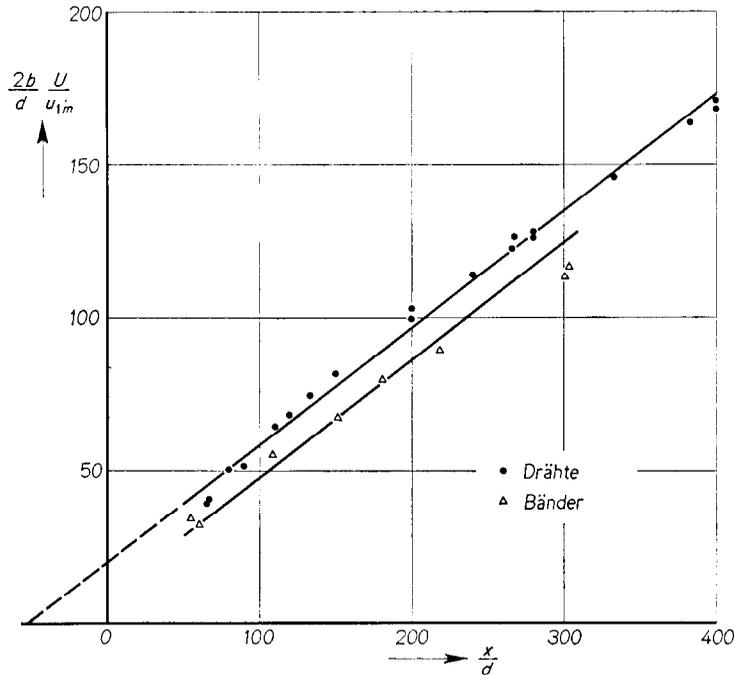


ABB. 6. Das Verhältnis der Breite  $2b$  der Geschwindigkeitsdelle zur Dellentiefe  $u_{1m}$  als Funktion des Abstandes  $x/d$  vom Störungsursprung in ebenen Windschatten.

schlanke Kegel), eine bestimmte Profilform, das glockenähnliche Profil der Abb. 3. Aber die Entwicklung der Vermischungsbreite war in jedem Falle individuell, wie aus den verschiedenen Zahlenwerten für  $\beta$  hervorgeht:

Kegel 1:6	} $\beta = 0,14$	(axiale Windschatten- strömungen).
Kegel 1:4		
Zylinder 1:2,2	} $\beta = 0,21$	
Kegel 1:2		
Kegel 1:1	} $\beta = 0,57$	
Scheibe		
	} $\beta = 0,86$	

Das Anwachsen von  $\beta b/u_{1m}$  mit abnehmendem Schlankheitsgrad der Körper kommt dadurch zum Ausdruck, dass die Geschwindigkeitsdelle in einem bestimmten Abstände  $(x - x_0)/d$  durch Steigerung der Anfangsstörungen verbreitert und zugleich abgeflacht wird. Demgegenüber wird die Geschwindigkeitsdelle in einem ebenen Windschatten breiter und zugleich tiefer, wenn die Anfangsstörungen verstärkt werden. Da die Tiefe der Delle in gleichem Masse wächst wie ihre Breite, bleibt der  $\beta$ -Wert für den ebenen Windschatten erhalten.

Die Breitenentwicklung  $b/d$  axialer Windschattenströmungen sind für zwei verschiedene Fälle in Abb. 7 dargestellt. Die eingezeichneten Kurven wurden nach Gl. (26) für  $\beta = 0,14$  und  $\beta = 0,20$  berechnet.\* Wie man sieht, liegen die Messpunkte  $b/d$  für die Windschattenströmung hinter dem Kegel 1:6 um die Kurve für  $\beta = 0,14$ , während die entsprechenden Messpunkte für die Strömungen hinter dem Kegel 1:4 und dem Zylinder 1:2,2 näherungsweise durch die Kurve für  $\beta = 0,20$  wiedergegeben werden.

\* Diese Werte für  $\beta$  ergaben sich aus den in Abb. 5 aufgetragenen Messwerten. Durch Integration einer Kurve  $\varphi\zeta$ , die die  $\varphi$ -Werte der Abb. 3 benutzt, wurde für den Formfaktor der Wert  $\gamma = 0,582$  bestimmt. Aus den gemessenen Impulsverlustprofilen berechneten wir als Widerstandsbeiwert für den Zylinder 1:2,2  $c_w \approx 0,8$ , für den Kegel 1:4  $c_w \approx 0,75$  und für den Kegel 1:6  $c_w \approx 0,68$ . Die Geringfügigkeit der Unterschiede in den  $c_w$ -Werten ist wohl auf den Einfluss des Stabes zurückzuführen, an dem die Körper auf ihrer Vorderseite befestigt waren (siehe Abb. 2). Der Widerstandsbeiwert kann daher kein Mass sein für die Grösse der Störungen auf der Leeseite der Körper.

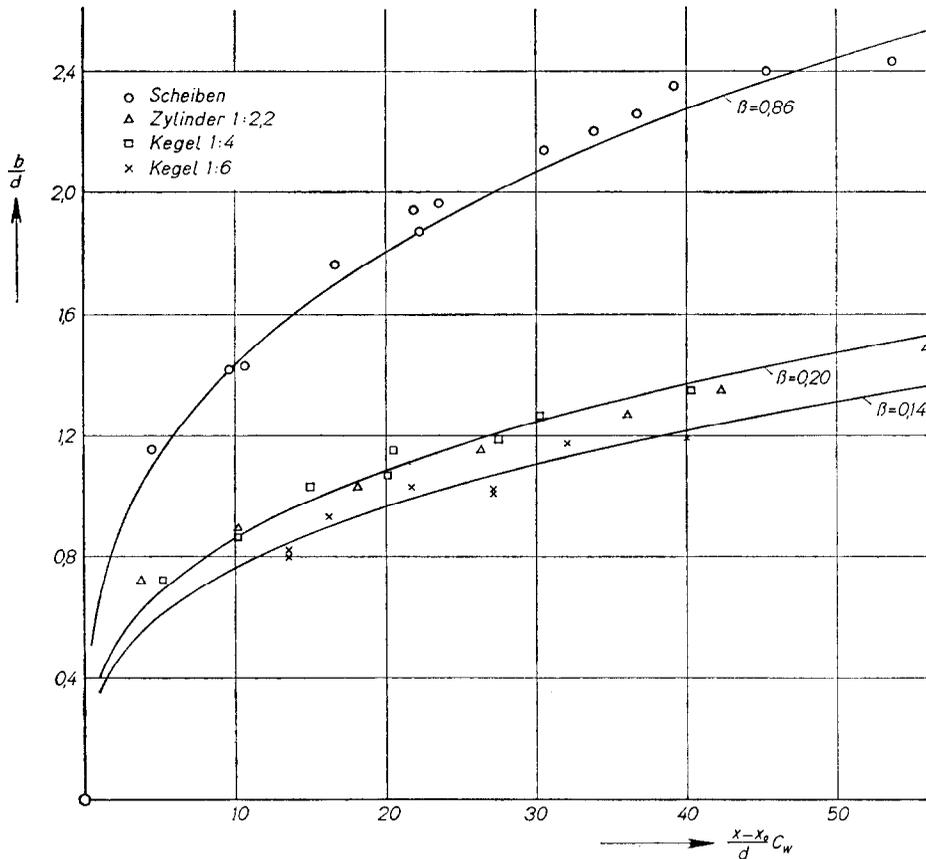


ABB. 7. Breitenentwicklung von axialen Windschattenströmungen.

## 6. DARSTELLUNG UND AUSWERTUNG DER GLOCKENFÖRMIGEN PROFILE

Wir führen in (14) die durch die Gleichung  $\tau = A (du_1/dy)$  definierte Austauschgrösse für den Impuls  $A$  ein, eliminieren  $db/dx$  mittels (24) und ersetzen  $u_1$  durch  $\varphi u_{1m}$ :

$$\frac{A}{\rho b u_{1m}} \frac{d\varphi}{d\zeta} = -\beta \zeta \varphi. \quad (30)$$

Unter der Annahme, dass die Austauschgrösse in der Querrichtung  $\zeta$  konstant sei, folgt aus Gl. (30)

$$\varphi = \exp(-\text{konst } \zeta^2).$$

Bei konstanter Austauschgrösse hätte also die Geschwindigkeitsverteilung die Form der Gauss'schen Fehlerkurve. Dieses Ergebnis hatten wir

bereits in der alten Arbeit [4] mitgeteilt und zwar bei der Behandlung des ebenen Windschattens (Gl. (14) gilt sowohl für den ebenen als auch für den rotationssymmetrischen Windschatten).

Wie die damaligen Versuche zeigten, liess sich das Geschwindigkeitsprofil des ebenen Windschattens für den mittleren Bereich gut durch eine Fehlerkurve darstellen. In den Randgebieten ergaben sich jedoch Abweichungen und zwar in dem Sinne, dass die turbulenten Störgeschwindigkeiten stärker auf Null absanken als das durch die Fehlerkurve beschriebene Profil. Dieses Ergebnis ist durchaus plausibel, da ja die Fehlerkurve beiderseits bis ins Unendliche reicht, während dem Windschatten bzw. der turbulenten Austauschbewegung durch die Hauptströmung endliche Grenzen gesetzt sind. Die Annahme einer annähernd konstanten

Austauschgrösse ist daher nur für den mittleren Bereich des Windschattens sinnvoll. An den Rändern muss der turbulente Austausch auf Null abklingen.

Grundsätzlich gilt das Gleiche für den rotationssymmetrischen Nachlauf. Offen blieb aber zunächst noch die Frage nach der Art des Abklingens der Austauschgrösse im rotationssymmetrischen Fall. Durch unsere in Abb. 3 dargestellten Messergebnisse wurde nun offenbar, dass sich der rotationssymmetrische Windschatten vom ebenen Windschatten deutlich unterscheidet. Legt man in Abb. 3 durch die achsennahen Messpunkte eine Fehlerkurve, so weichen die Messpunkte bereits für  $|\zeta| > 0,4$  von dieser Kurve ab (beim ebenen Windschattenprofil treten Abweichungen erst bei  $|\zeta| > 1,2$  auf). Demnach klingt der turbulente Austausch nach dem Rande zu wesentlich schneller ab als im ebenen Fall. Die Turbulenz ist also im runden Windschatten noch weniger "frei" als im ebenen Windschatten, offenbar weil sie allseitig von der äusseren Potentialströmung umschlossen wird.

Von verschiedenen Verteilungen der Austauschgrösse, die wir erprobten, erwies sich die Funktion

$$A = A_m \exp [-(a\zeta)^4] \quad (31)$$

als die günstigste ( $A_m =$  Maximalwert der Austauschgrösse des Impulses in der Achse). Führt man (31) in (30) ein, so folgt aus Gl. (30) nach deren Integration:

$$\ln \varphi = -\frac{\beta \rho b u_{1m}}{2a^2 A_m} \int_0^{(a\zeta)^2} \exp [(a\zeta)^4] d(a\zeta)^2 + \text{konst.} \quad (32)$$

Bei  $\zeta = 0$  ist  $\varphi = 1$  bzw.  $\ln \varphi = 0$ . Daher ist die Integrationskonstante gleich Null.

Wir setzen

$$(a\zeta)^2 = t, \quad \frac{\beta \rho b u_{1m}}{A_m} = k$$

und lösen Gl. (32) nach  $\varphi$  auf:

$$\varphi = \exp \left( -\frac{k}{2a^2} \int_0^t e^{t^2} dt \right) \quad (33)$$

Die Funktion  $\int_0^t e^{t^2} dt$  ist tabellarisiert [7].

Die Messergebnisse werden am besten beschrieben, wenn man

$$a = 0,63 \quad \text{und} \quad k = 1,315$$

setzt. Die  $\varphi$ -Funktion mit diesen Konstanten ist in Abb. 3 dargestellt. Abb. 3 zeigt die gute Wiedergabe der Geschwindigkeitsmessungen durch Gl. (33). In Abb. 3 ist ausser  $\varphi$  nach Gl. (33) noch  $A/A_m$  nach Gl. (31) aufgetragen. Wie man sieht, ist die Austauschgrösse in der Nähe der Achse ( $-0,4 < \zeta < 0,4$ ) praktisch konstant und verringert sich dann stark mit wachsendem  $\zeta$ .

Wenn man annimmt, dass das Verhältnis der Austauschgrösse für die Wärme  $A_q$  zur Austauschgrösse des Impulses  $A$  über dem Vermischungsquerschnitt konstant ist, so gilt für die dimensionslose Temperaturverteilung die Formel (22)  $\vartheta = \varphi^A/A_q$ . Wir setzten

$$A_q = 1,16A$$

und erhielten mit der  $\varphi$ -Funktion nach Gl. (33) die zwischen die Temperaturmesspunkte auf der oberen Hälfte von Abb. 3 eingezeichnete  $\vartheta$ -Kurve. Wie man sieht, werden die Temperaturmessungen recht gut durch diese Kurve dargestellt. Für den mittleren Bereich der Vermischungzone könnte man mit einem etwas grösseren Verhältnis als  $A_q/A = 1,16$  rechnen.

Bereits die Messungen von Fage und Falkner [8] im Windschatten hinter einem geheizten ebenen Widerstandskörper hatten gezeigt, dass die Austauschgrösse für die Wärme grösser ist als die Austauschgrösse für den Impuls. Dieses Ergebnis wurde durch spätere Untersuchungen im ebenen Windschatten und im ebenen Freistrah [6] bestätigt. Allerdings hatten die früheren Messungen in den ebenen Strömungen ein Verhältnis  $A_q/A \approx 2$  ergeben.\* Das von uns im rotationssymmetrischen Nachlauf bestimmte Verhältnis  $A_q/A \approx 1,16$  ist daher überraschend niedrig. Das Verhältnis der Austauschgrössen ist hier von einer Grössenordnung, wie man sie in Rohrströmungen festgestellt hat [9]. Auch dieses Ergebnis zeugt von einer ziemlich scharfen

\* Hier ist anzumerken, dass das Verhältnis der Austauschgrössen nur beim ebenen Freistrah über dem gesamten Strömungsquerschnitt annähernd konstant und gleich 2 ist. Beim ebenen Windschatten ist  $A_q/A$  nur im mittleren Bereich annähernd 2 und sinkt in den Randgebieten deutlich ab. Dies ist ein weiteres Kennzeichen für die Behinderung der freien Turbulenz des ebenen Windschattens durch die äussere Potentialbewegung.

Begrenzung und Behinderung der turbulenten Austauschbewegung im rotationssymmetrischen Windschatten durch die umgebende Potentialströmung.

## 7. ERGEBNISSE

In ausgebildeten turbulenten Windschattenströmungen hinter rotationssymmetrischen Körpern wurde folgendes festgestellt:

(1) Die Form des Geschwindigkeitsprofils hängt in gewissen Grenzen von der Form des Rotationskörpers ab, der den Windschatten verursacht. Kurze Rotationskörper, die starke Anfangsstörungen hervorrufen, erzeugen Geschwindigkeitsdellen, die in Achsennähe ganz flach sind und an den Rändern ziemlich steil verlaufen, wie Abb. 4 zeigt. Schlanke Körper, von denen nur schwache Anfangsstörungen ausgehen, rufen glockenförmige Windschattenprofile hervor, deren Form in Abb. 3 dargestellt ist.

(2) Die im Windschatten hinter einem geheizten Zylinder gemessenen Verteilungen der Geschwindigkeit und der Temperatur sind ebenfalls glockenförmig (siehe Abb. 3). Das dimensionslose Temperaturprofil  $\vartheta$  ist etwas breiter als das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil  $q$ .

(3) Zur Darstellung und Auswertung der glockenförmigen Profile benutzten wir die durch Ähnlichkeitsannahmen vereinfachten Bewegungsgleichungen. Eine gute Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils ergab sich aus der Annahme, dass die Austauschgrösse des Impulses  $A$  durch die Funktion

$$A = A_m \exp [-(0,63\zeta)^4]$$

dargestellt wird (siehe Abb. 3).

(4) Die dimensionslose Temperaturverteilung lässt sich durch die bereits in einer früheren Arbeit abgeleitete Formel  $\vartheta = q^{A/A_q}$  wiedergeben ( $A_q$  = Austauschgrösse für die Wärme), wenn  $A/A_q \approx 1,16$  gesetzt wird. Im Vergleich zu dem bisher in Freistrahlen und in ebenen Windschattenströmungen festgestellten Verhältnis der Austauschgrössen  $A/A_q \approx 2$  ist das im axialen Windschatten ermittelte Verhältnis überraschend niedrig und von der Grössenordnung der bisher in turbulenten Rohrströmungen festgestellten Werte.

(5) Die Entwicklung der Breitenausdehnung des Windschattens mit wachsender Entfernung vom Störkörper hängt von der Körperform bzw. von der Grösse der Störungen ab, die die turbulente Windschattenströmung erzeugen. Dieses Verhalten des axialen Windschattens steht im Gegensatz zum ebenen Windschatten, dessen Breitenentwicklung, von der Individualität der Anfangsstörungen unabhängig, nach einem einheitlichen Gesetz erfolgt.

(6) Massgeblich für die Breitenentwicklung ist ein durch Ähnlichkeitsbetrachtungen begründeter "Turbulenzfaktor"  $\beta$ . Während dieser Faktor für die ebenen Windschattenströmungen den Wert  $\beta \approx 0,095$  hat, gibt es für die axialen Windschattenströmungen keinen universellen  $\beta$ -Werte. Bei den untersuchten Strömungen lagen die  $\beta$ -Werte zwischen 0,14 (Kegelkörper 1:6) und 0,86 (Kreisscheibe).

(7) Wie bereits in früheren Arbeiten vermutet, wächst die Vermischungsbreite mit der 3. Wurzel der Entfernung vom Störungsursprung. Es bleibt aber ein individueller Faktor offen. Dieses Verhalten kommt in Abb. 7 zum Ausdruck, wo ausser den Messwerten die Funktion Gl. (26) für  $\beta = 0,14$ ,  $\beta = 0,20$  und  $\beta = 0,86$  dargestellt ist.

(8) Wegen der Abhängigkeit der axialen Windschattenströmungen von der Individualität der Anfangsstörungen, wegen des starken Abfallens der turbulenten Austauschgrösse mit dem Querabstand und wegen des geringen Zahlenwertes von  $A/A_q$ , der einen Vergleich mit den Austauschverhältnissen in Rohrströmungen nahelegt, unterscheiden sich die axialen Strömungen wesentlich von den bekannten Strömungen der freien Turbulenz. Im axialen Windschatten ist die "Freiheit" der Turbulenz beschränkt, weil der Austauschbewegung schärfere Grenzen gesetzt sind als im ebenen Windschatten und in den Freistrahlen. Dies liegt offenbar an der allseitigen Umschliessung des axialen Windschattens durch die äussere Potentialbewegung.

## LITERATUR

1. L. M. SWAIN, On the turbulent wake behind a body of revolution. *Proc. Roy. Soc.* **A125**, 647-59 (1929).
2. L. PRANDTL, Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.* **5**, 136-39 (1925).

3. A. A. HALL and G. S. HISLOP, Velocity and temperature distributions in the turbulent wake behind a heated body of revolution (Note by S. GOLDSTEIN). *Proc. Camb. Phil. Soc.* **34**, 345-53 (1938).
4. H. REICHARDT, Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz. *VDI-Forschungsheft* **414** (2. Aufl. 1951) (1942).
5. H. REICHARDT, Impuls- und Wärmeaustausch in freier Turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.* **24**, 268-72 (1944).
6. H. B. SQUIRE, Reconsideration of the theory of free turbulence. *Phil. Mag. Ser. 7*, **39**, 1-20 (1948).
7. JAHNKE-EMDE, *Tabellen höherer Funktionen*. Leipzig (1952).
8. A. FAGE and F. M. FALKNER, The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion (Appendix by G. I. TAYLOR). *Proc. Roy. Soc.* **A135**, 685-702 (1932).
9. H. LUDWIG, Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoefizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten. *Z. Flugwiss.* **4**, 73-81 (1956).

**Abstract**—The development of the width of a turbulent axi-symmetric wake depends on the shape of the body of revolution generating the wake. Within certain limits, the shape of the momentum loss distribution is also influenced by the shape of the body. Behind slender bodies of revolution bell-shaped distributions of velocity and temperature are found. The coefficient of heat exchange is slightly greater than the coefficient of momentum exchange. The outer potential flow restricts the turbulent exchange in axi-symmetric wakes more than in two-dimensional wakes and in jets.

**Résumé**—L'évolution de l'épaisseur d'une onde de révolution turbulente dépend de la forme du corps de révolution qui engendre cette onde. Dans une certaine mesure, la forme de la distribution de la perte de quantité de mouvement dépend également de la forme du corps. Derrière des corps de révolution profilés, on trouve des distributions de vitesse et de température en cloche. Le coefficient d'échange thermique est légèrement plus grand que le coefficient d'échange de quantité de mouvement. L'écoulement potentiel extérieur réduit plus l'échange dans les ondes de révolution que dans les ondes bidimensionnelles ou les jets.

**Аннотация**—Показано, что утолщение ширины турбулентного осесимметричного следа за телом вращения зависит от его формы. В определенных пределах конфигурация тела также влияет на форму распределения потери импульса. Найдены куполообразные распределения скорости и температуры в спутной струе за тонкими телами вращения. Коэффициент теплообмена оказывается несколько большим коэффициента обмена импульса. Внешний потенциальный поток оказывает большее влияние на турбулентный перенос в осесимметричных потоках, чем в двумерных потоках и струях.